# Calcul d'un cosinus

*Préliminaire*

Soit $a \in \mathbb{R}, \varphi \in ]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $C(a,\varphi,n) = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + k\varphi)$.

Etablir l'idéntité : $C(a,\varphi,n) = \cos\left(a + \frac{n}{2}\varphi\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$,

*Problème*

L'objectif de ce problème est de présenter différentes démarches menant à l'expression par radicaux de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Par commodité, nous poserons $\theta = \frac{\pi}{5}$.

1.a Résoudre l'équation $z^5 + 1 = 0$ en exprimant ses solutions sous forme trigonométrique.

1.b Déterminer la fonction polynomiale $z \mapsto Q(z)$ telle que $z^5 + 1 = (z+1)Q(z)$.

1.c Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en réalisant le changement d'inconnue $Z = z + \frac{1}{z}$.

1.d Déterminer enfin l'expression par radicaux de $\cos\theta$.

2.a En partant de la relation $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, exprimer $\cos 2\theta$ puis $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

2.b En déduire que $\cos\theta$ est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.

2.c Résoudre celle-ci en commençant par observer l'existence de solutions « évidentes ».
Conclure.

3.a En exploitant le préliminaire, montrer que $\cos\theta + \cos 3\theta$ est égal à un nombre rationnel simple.

3.b Linéariser $\cos\theta \cos 3\theta$ et observer que cette quantité est égale à un rationnel assez simple.

3.c En déduire la valeur de $\cos\theta$.

4.a Calculer $1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta$.

4.b En déduire que $\cos\theta$ est solution d'une équation du second degré.
Conclure.